第11讲 二元二次方程组

**知识梳理**

**1． 二元二次方程**

仅含有\_\_\_\_\_\_未知数，并且含有未知数的项的最高次数是\_\_\_\_\_\_的\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_方程，叫做\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

关于*x*、*y*的二元二次方程的一般形式是：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(*a*、*b*、*c*、*d*、*e*、*f*都是常数，且*a*、*b*、*c*中至少有一个不是零；当*b*为零时，*a*与*d*以及*c*与*e*分别不全为零).

其中，*ax*2、*bxy*、*cy*2叫做这个方程的\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，*a*、*b*、*c*分别叫做\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；*dx*、*ey*叫做这个方程的\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，*d*、*e*分别叫做\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；*f* 叫做这个方程的\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

**2． 二元二次方程组**

仅含有两个未知数，各方程是整式方程，并且含有未知数的项的最高次数为2.

像这样的方程组叫做**二元二次方程组**.

**3． 二元二次方程组的解法**

(1)能使二元二次方程左右两边的值相等的一对未知数的值，叫做**二元二次方程的解**.

方程组中所含各方程的公共解叫做这个**方程组的解**.

(2)一般解法：代入消元法和因式分解法

解二元二次方程组的基本思想为：(1)消元；(2)降次.

**4．二元二次方程组的解的讨论**

**典型解析**

**例1**：(1)下列方程中，哪些是二元二次方程？

①2*x*+5*y*=4； ②7𝑦2−5𝑥=1； ③𝑥y=9； ④7𝑦3−5𝑥=1；

⑤+𝑦2=1； ⑥4*x*2-*xy*+*y*2-6*y*+3=0.

**解**方程①是二元一次方程，不是二元二次方程；方程②是二元二次方程；方程③是二元二次方程；方程④是二元三次方程；方程⑤是分式方程，不是二元二次方程；方程⑥是二元二次方程.

(2)下列关于*x*、*y*的方程组中，

其中是二元二次方程组的有( )个.

(A)1 (B)2 (C)3 (D)4

答案：D

**【变式训练】**

1．方程中，\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_叫做方程的二次项；\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_叫做方程的一次项；\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_叫做方程的常数项.

答案：*x*2，*xy*，-6*y*2；-*y*，3*x*；-2

2．当*m*为何值时，方程组是关于*x*、*y*的二元二次方程组？

答案：*m*≠±1

**例2：**已知与是关于*x*、*y*的二元二次方程*a*2*x*2+*by*+3=0的两组解，试求*a*+*b*的值.

**解.**将与分别代入*a*2*x*2+*by*+3=0，可得

由①得，*b*=-1.

代入②得*a*2-7+3=0.

解得*a*=±2.

所以，当*a*=2，*b*=-1时，*a*+*b*=1；

当*a*=-2，*b*=-1时，*a*+*b*=-3.

**【变式训练】**

1．二元二次方程(*x*-3)(*y*+5)=0的解的情况是( ).

(A)有一个解 (B)有两个解 (C)有四个解 (D)有无数个解

答案：D

2．已知是方程组的解，求*a*与*b*的值.

答案：*a*=1，*b*=2

**例3：**解下列方程组：

(1) (2)

解：(1)由方程①，得*x*=*y*+1.③

将③代入方程②，得(*y*+1)2+（*y*+1）*y*+*y*2=1.

整理，得*y*2+*y*=0.

解得*y*1=0，*y*2=-1.

将*y*1=0代入方程③，得*x*1=1；

将*y*2=-1代入方程③，得*x*2=0.

所以，原方程组的解是

(2)观察方程①，可以知道*x*=3*y*+2，那么方程②中的*x*也同样可以用3*y*+2来表示，得

(3*y*+2)2=3(3*y*+2)*y*+6.

整理，得6*y*=2.

解得，把代入方程*x*=3*y*+2，得*x*=3.

所以，原方程组的解是

**【变式训练】**

(1)方程组的解是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

(2)方程组的解是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

(3)方程组的解是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

(4)方程组的解是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：(1)

**例4：**解下列方程组：

(1) (2)

解：(1)将方程①左边因式分解，方程①可变形为

(*x*+*y*)(*x*-*y*-5)=0.

得*x*+*y*=0或*x*-*y*-5=0.

将它们与方程②分别组成方程组，得

或

解方程组(I)，得

解方程组(Ⅱ)，得

所以，原方程组的解是

(2)分析.方程①可变形为(*x*+2*y*)2=9，两边开平方，得到两个一次方程.方程②的左边分解因式，可化为两个一次方程.把方程①所得的两个一次方程中的每一个分别与由方程②所得的两个一次方程组成方程组，这些方程组的解的全体就是原方程组的解.

方程①可变形为(*x*+2*y*)2=9.

两边开平方，得*x*+2*y*=±3.

将方程②左边分解因式，方程②可变形为(*x*-*y*)(*x*+*y*-4)=0.

得*x*-*y*=0或*x*+*y*-4=0.

因此，原方程组可化为

分别解这四个方程组，得原方程组的解是

**例5**：解方程组：

**分析**.原方程组的两个方程都没有一次项，根据这一特征，我们通过加减法消去方程的常数项，得到一个关于*x*、*y*的二次三项式，然后通过因式分解降次.

原方程还有一个特征：把*x*、*y*交换后所得的方程与原方程相同，这样的方程一般都可以“整体代换”，本题中实质上是设*x*2+*y*2=*a*，*xy*=*b*，求出*a*和*b*.

**解**.解法一.②×7-①×3，得2*x*2-5*xy*+2*y*2=0.

对左边因式分解，方程可变形为*x*=2*y*或*y*=2*x*.

将它们与方程②分别组成方程组，得

或

分别解这两个方程组得原方程组的解是

解法二由①+②，得*x*2+*y*2=5.③

由①-②，得2*xy*=4.④

由③+④，得(*x*+*y*)2=9.

两边开平方，得*x*+*y*=±3.

由③-④，得(*x*-*y*)2=1.

两边开平方，得*x*-*y*=±1.

因此，原方程组可化为

分别解这四个方程组，得原方程组的解是

在一些特殊的二元二次方程组中，消项也是很好的方法.

**【变式训练】**

解方程组：

**分析**.方程组中的两个方程均缺一次项，我们可以消去常数项，得到一个二次三项式的方程.对其因式分解，就可以转化为例2的类型.

**解.**由①-②×3，得*x*2+*xy*-3(*xy*+*y*2)=0.

整理，得*x*2-2*xy*-3*y*2=0.③

对方程③左边因式分解，方程③可变形为*x*-3*y*=0或*x*+*y*=0.

因此，原方程组可化为两个二元一次方程组或

分别解这两个方程组，得原方程组的解是

解本方程组也可将方程①与方程②相加，用例3的解法二求解.

**例6**：解方程组：

**分析**.注意到两个方程都有*xy*项，所以可用加减法消之，得到一个二元一次方程，即转化为由一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的方程组.

**解：**由①×3-②，变形得*y*=3*x*-1.③

将③代入①，整理得3*x*2-3=0.

解得*x*1=1，*x*2=-1.

分别代入③，解得*y*1=2，*y*2=-4.

所以，原方程组的解是

若方程组的两个方程的二次项系数对应成比例，则可用加减法消去二次项，得到一个二元一次方程，把它与原方程组的任意一个方程联立，解此方程组，即得原方程组的解.

二元二次方程组类型多样，消元与降次是两种基本方法，具体问题具体解决.

**例7**：解方程组：(1)

答案：(1)

提示：二次项系数对应成比例则消二次项

(2)

答案：(2)提示：非二次项系数对应成比例则消非二次项

**例8：**当*k*为何值时，方程组有实数解？

**分析.**由方程②可用含*x*的代数式表示*y*，代入方程①，可得关于*x*的一元二次方程.原方程组有实数解，则这个一元二次方程有实数解.

**解.**方程②可变形为*y*=*k*-*x*.③

将③代入方程①，得2*x*2-2*kx*+*k*2-9=0.④

因为，原方程组有实数解，

所以，方程④有实数根，即△=72-4*k*2≥0.

解得-3√2≤*k*≤3√2.

所以，当-3√2≤*k*≤3√2时，原方程组有实数解.

**【变式训练】**

(1)已知关于*x*、*y*的方程组有两组不相等的实数解，求*k*的取值范围；

(2)已知关于*x*、*y*的方程组有两组相等的实数解，求*m*的取值范围.

答案：(1)*k*<，且*k*≠0；(2)*m*=±

**例9：**当*k*为何值时，方程组有唯一的一组实数解？

**分析**.将②代入方程①，得关于*x*的方程.方程组有唯一的一组实数解，则这个关于*x*的方程有一个实数根，或有两个相等的实数根.

**解**.将②代入方程①，整理得

(*k*2+1)*x*2+4√2*kx*+4=0.③

因为对于任意实数*k*，都有*k*2+1≥1>0，

所以*k*2+1≠0.

因此，方程③是关于*x*的一元二次方程.

因为原方程组有唯一的一组实数解，

所以，方程③的△=0，即16*k*2-16=0.

解得*k*=±1.

当*k*=1时，解得

当*k*=-1时，解得

所以，当*k*=±1时，原方程组有唯一的一组实数解.

**例10**：当*a*取哪些值时，方程组只有两组实数解？

**解：**若是原方程组的解，则也是原方程组的解.

因此，为使原方程组有两组实数解，必须使*x*0=*y*0或*x*0=-*y*0.

(1)对于方程(*x*+*y*)2=14，设*x*=*y*，解得

代入第一个方程，解得

反之，当时，原方程组的解是

(2)对于方程(*x*+*y*)2=14，设*x*=-*y*，则0=14，即方程(*x*+*y*)2=14无解，与题意矛盾，所以不成立.

综上所述，当时，原方程组只有两组实数解.

**【变式训练】**

已知方程组只有一组实数解，求*a*的值.

答案：*a*=12或*a*≤-6.提示：第二个方程可化为

*x*2+2=*y*且*x*≥0.①

把①代入第一个方程，整理成关于*x*的方程，得

*x*2-*ax*+2*a*+12=0.②

(1)当方程②有两个相等的实数根，即△=0.解得*a*=12或*a*=-4.

当*a*=12时，解得

当*a*=-4时，解得（舍去）.

(2)当方程②有两个异号实数根，则△>0且2*a*+12<0，解得*a*<-6.

(3)当方程②有一个负根另一个根为0，则△>0，*a*<0且2*a*+12=0，解得*a*=-6.

综上所述，*a*=12或*a*≤-6

**同步训练**

**一、填空题**

1．下列方程中，哪些是二元二次方程：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

(3)*xy*=0；(4)*x*2-3*y*2.

**答案：**方程(3)是二元二次方程，其他都不是二元二次方程

2．写出方程*y*2-5*x*=1的两组解\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：等

3．已知由一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的二元二次方程组的解是请你写出一个这样的方程组\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：如

4．解方程组时，消去*x*，可得到关于*y*的整式方程是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：(30+3*y*)2+*y*2=20(或*y*2+18*y*+88=0)

5．把方程4*x*2-4*xy*-15*y*2=0分解为两个二元一次方程为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_和\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：2*x*-5*y*=0，2*x*+3*y*=0

6．由二元二次方程组可化为的二元一次方程组是\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：

7．解方程组的基本步骤：

第一步，由方程①得(*x*+4*y*)(*x*-*y*)=0即*x*+4*y*=0或*x*-*y*=0；由方程②得(*x*+*y*)2=25即*x*+*y*=5或*x*+*y*=-5；

第二步，原方程组化为四个方程组\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_和\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

第三步，分别解这四个方程组，得原方程的解为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

在上述解方程组的过程中，第一步，运用\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_法将方程①和②转化为两个二元一次方程，达到了\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_的目的；在第三步中，四个方程组都是用\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_法求得方程的解，体现了\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_的数学思想.

答案：

因式分解；降次；加减消元；化归

8．若则满足等式的*x*、*y*的值是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：

**二、选择题**

9．方程组的解的情况是( ).

(A)有两组相同的实数解 (B)有两组不同的实数解

(C)没有实数解 (D)不能确定

答案：B

10．解方程组的可行方法是( ).

(A)将②式分解因式 (B)将①式分解因式

(C)加减消元 (D)将①②式都分解因式

答案：A

**三、解答题**

11．解下列方程组：

答案：(1)

12．解下列方程组：

答案：(1) (2)

(3)

(4)

13．若方程组只有一组实数解，求*m*的值.

**答案：**2

14．已知关于*x*、*y*的方程组恰有两个不同的实数解，求实数*a*的范围.

答案：-1<*a*<1或提示：由第一个方程变形得*y*=*x*2>0，代入第二个方程，得

*y*2+(1-2*a*)*y*+*a*2-1=0.①

若方程组有两个不同的实数根，则关于*y*的方程①有两种情况：

(1)方程①有两个相等的正实数根，则*x*=±√*y*有两解，

所以解得*a*=

(2)方程①有两个不相等的实数根，且两根异号，于是

解得*a*2<1，因此-1<*a*<1.

综上所述，当-1<*a*<1或时，原方程组恰有两个不同的实数解

**走进中考**

1．(2013·上海中考)解方程组： ．

